Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Wintersemester 2023/24

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra I*

Blatt 2

Abgabe: Freitag, den 10. November 2023, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Beweismechanikaufgabe (*4 Punkte*)

Wir sagen, dass eine ganze Zahl b eine ganze Zahl a teilt, wenn es eine ganze Zahl c mit $a = b \cdot c$ gibt. Wir schreiben dann $b \mid a$ und nennen b einen Teiler von a und a ein Vielfaches von b.

(a) Betrachte die folgenden Aussagen:

(i) $\exists b \in \mathbb{Z} : \forall a \in \mathbb{Z} : b \mid a.$ (ii) $\forall b \in \mathbb{Z} : \exists a \in \mathbb{Z} : b \mid a.$

Wahr oder falsch? Äußere jeweils eine Vermutung und beweise diese.

(b) Beweise die folgende Aussage:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall a \in \mathbb{Z} : \{b \in \mathbb{Z} \, : \, n \mid (a-b)\} = \{a + k \cdot n \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Hinweis: Die Beweismechanik-Abgabe muss als Zweier-Team abgegeben werden. Speichern Sie Ihre gemeinsame Beweismechanik-Abgabe in einer PDF-Datei unter einem Namen der Form b1blattx-bma-ihrnachname-nachnameihrespartners.pdf *ab, wobei Sie x durch die Nummer des Übungsblattes, ihrnachname durch Ihren Nachnamen ersetzen usw. Laden Sie die Beweismechanik-Abgabe dann getrennt von den anderen Aufgaben auf der ILIAS-Seite der Vorlesung „Einführung in das mathematische Arbeiten I“ online unter „Abgabe Beweismechanik-Aufgabe – Vorlesung Lineare Algebra I“ hoch. Die Abgabe im Zweier-Team ist verpflichtend. Pro Zweier-Team bitte nur eine Abgabe!*

Aufgabe 2.1 (*1+1+1+1 Punkte*)

Bestimmen Sie mithilfe des Euklidischen Algorithmus und seiner Umkehrung. Geben Sie dabei die Zwischenschritte an!

(a) $\mathrm{ggT}(193, 60)$.
(b) Zwei ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ so, dass $169x + 144y = 1$.
(c) Das multiplikative Inverse von 4 in $\mathbb{Z}_{19}$.
(d) Das multiplikative Inverse von 10 in $\mathbb{Z}_{27}$.

Aufgabe 2.2 (*2+2 Punkte*)

Für $n = 5, 6$, schreiben Sie die Verknüpfungstafeln für die Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}_n$ auf und bestimmen Sie die multiplikativ invertierbaren Elemente von $\mathbb{Z}_n$.

Aufgabe 2.3 (*1+1+1+1 Punkte*)

Finden Sie für folgende Werte von n jeweils alle Elemente $x \in \mathbb{Z}_n$, die der Gleichung genügen. (Beachten Sie, dass die Lösungsmenge auch leer sein kann!)

(a) $n = 5$, $3 \cdot_5 x = 1$
(b) $n = 11$, $x^2 +_{11} 1 = 0$ (wobei $x^2 = x \cdot_{11} x$)
(c) $n = 9$, $x^3 = 0$ (wobei $x^3 = x \cdot_9 x \cdot_9 x$)
(d) $n = 12$, $2 \cdot_{12} x = 3$

Zusatzaufgabe für Interessierte. (*4 Bonuspunkte*)

Zeigen Sie folgende Verallgemeinerung des Divisionsalgorithmus aus der Vorlesung:
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$. Dann gilt:

$$\exists! q, r \in \mathbb{Z} \text{ mit } 0 \leq r < |b| \text{ und } a = bq + r.$$